

Modelska analiza I

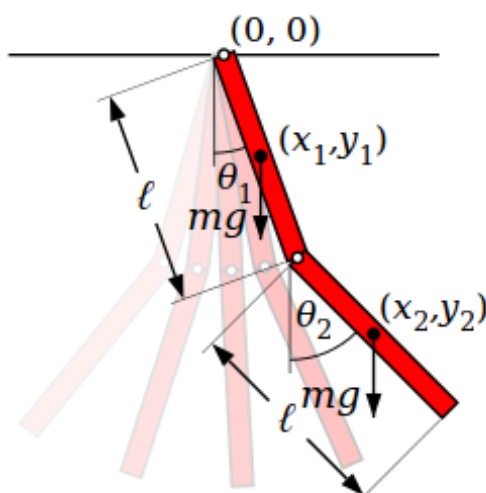
Zaključna naloga - Numerična obravnava dvojnega nihala

Boštjan Zajec (28152011), 7. september 2016

Dvojno nihalo je kompleksen in kaotičen sistem, ki ga sestavljata dve sklopljeni nihali, pri čemer je eno pritrjeno na konec drugega. Pritrdišče drugega nihala se zato premika tako, kot napoveduje prvo nihalo. Ker je sistem zelo bogat in ima veliko možnih stanj, se v tej nalogi omejimo na nekaj enostavnih primerov in pri obravnavi sprejmemo naslednje predpostavke:

1. Dvojno nihalo sestavljata dve togi in homogeni palici (fizični nihali), pri čemer na obe telesi deluje težni pospešek $g = 10 \text{ m/s}^2$. Obe palici imata dolžino l in maso m .
2. Ena od palic je gibljivo vpeta v nepremični strop, med tem ko je druga gibljivo pritrjena na konec druge. Palici se gibljeta zgolj v ravnini kot kaže Slika 1.
3. Zanemarimo trenje v ležajih in zračni upor oz. vse zunanje sile.

Fizikalne obravnave sistema se lotimo z Lagrangevim formalizmom, saj bi bilo gibalne enačbe sicer težko zapisati. Za izhodišče koordinatnega sistema izberemo pritrdišče zgornjega nihala, kot generalizirani koordinati pa izberemo kota obeh nihal θ_1 in θ_2 , kot prikazano na sliki 1.



Slika 1: Fizikalni model dvojnega nihala

Da lahko zapišemo Lagrangevo funkcijo, najprej izrazimo potencialno in kinetično energijo obeh palic. Pri njunem določanju si pomagamo s koordinatami težišč palic v kartezičnem koordinatnem sistemu:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{l}{2} \sin \theta_1 & x_2 &= l \left(\sin \theta_1 + \frac{1}{2} \sin \theta_2 \right) \\ y_1 &= -\frac{l}{2} \cos \theta_1 & y_2 &= -l \left(\cos \theta_1 + \frac{1}{2} \cos \theta_2 \right). \end{aligned} \quad (1)$$

Lagrangevo funkcijo lahko zdaj zapišemo kot vsoto kinetične in potencialne energije nihala. Tukaj upoštevamo, da je kinetična energija sestavljena iz translacijske in rotacijske energije obeh nihala

$$L = W_k - W_p = \frac{1}{2}(v_1^2 + v_2^2) + \frac{1}{2}I(\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2) - mg(y_1 + y_2), \quad (2)$$

kjer je $I = \frac{1}{12}ml^2$ vztrajnostni moment vrtenja palice okoli njenega težišča. Ob upoštevanju zveze $v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2$ in z odvajanjem enačb (1) lahko L zapišemo izključno kot funkcijo generaliziranih koordinat θ_1 in θ_2 .

$$L = \frac{1}{6}ml^2 \left[\dot{\theta}_2^2 + 4\dot{\theta}_1^2 + 3\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \right] + \frac{1}{2}mgl(3 \cos \theta_1 - \cos \theta_2). \quad (3)$$

Časovni razvoj generaliziranih koordinat običajno poiščemo preko Euler-Lagrangeve enačbe $\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) = 0$. Tak pristop nam da v našem primeru dve sklopljeni diferencialni enačbi drugega reda, ki pa vsebujeta tudi prve odvode in analitično nista rešljivi. Ker moramo enačbe reševati numerično, za reševanje potrebujemo diferencialne enačbe 1. reda, ki jih lahko bolj neposredno dobimo prek generaliziranih momentov

$$p_{\theta_1} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} = \frac{1}{6}ml^2 \left[8\dot{\theta}_1 + 3\dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \right] \quad (4)$$

$$p_{\theta_2} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} = \frac{1}{6}ml^2 \left[2\dot{\theta}_2 + 3\dot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) \right]. \quad (5)$$

Od tod lahko izrazimo

$$\dot{\theta}_1 = \frac{6}{ml^2} \frac{2p_{\theta_1} - 3 \cos(\theta_1 - \theta_2)p_{\theta_2}}{16 - 9 \cos^2(\theta_1 - \theta_2)} \quad (6)$$

$$\dot{\theta}_2 = \frac{6}{ml^2} \frac{8p_{\theta_2} - 3 \cos(\theta_1 - \theta_2)p_{\theta_1}}{16 - 9 \cos^2(\theta_1 - \theta_2)}. \quad (7)$$

Časovni razvoj generaliziranih momentov dobimo podobno, z odvajanjem Lagrangeve funkcije po generaliziranih spremenljivkah.

$$p_{\dot{\theta}_1} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} = -\frac{1}{2}ml^2 \left[\dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + 3\frac{g}{l} \sin \theta_1 \right] \quad (8)$$

$$p_{\dot{\theta}_2} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} = -\frac{1}{2}ml^2 \left[-\dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + \frac{g}{l} \sin \theta_2 \right]. \quad (9)$$

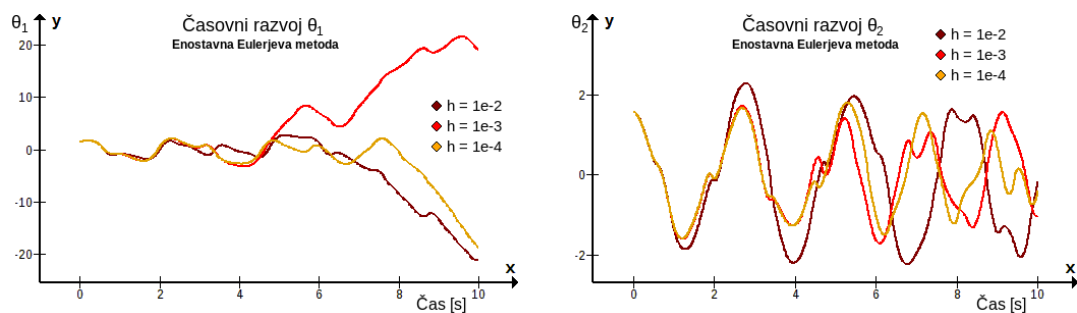
Dobljen sistem štirih diferencialnih enačb (6) - (9) opisuje gibanje dvojnega nihala. Reševanje sistema z numeričnimi metodami je opisano v naslednjih poglavjih.

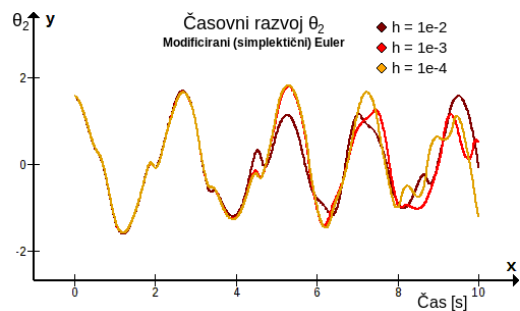
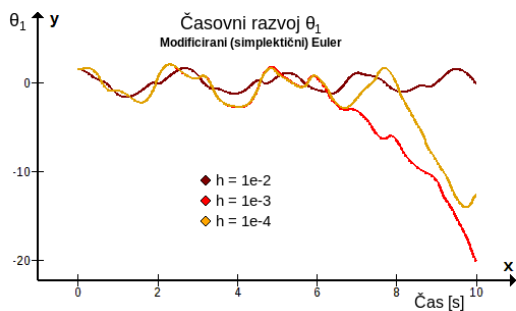
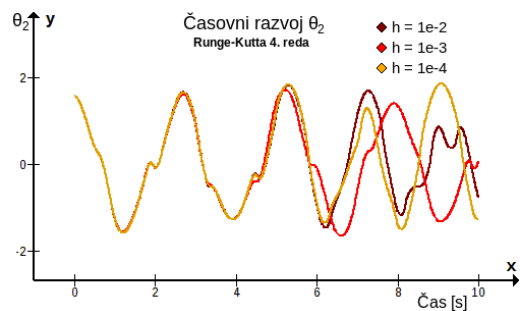
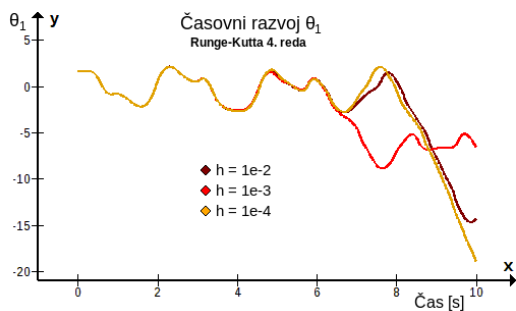
1 Primerjava numeričnih metod

Za nadaljnjo obravnavo sem zaradi enostavnosti izbral dolžino $l = 1$ m in maso $m = 1$ kg. Nihalo na začetku ni imelo hitrosti oz. kinetične energije, potencialna energija pa je bila zagotovljena s togim odmikom od ravnovesne lege $\theta_1(0) = \theta_2(0) = \theta$. Iz enačb (4) in (5) pri takih pogojih sledi, da sta začetni vrednosti momentov $p_{\dot{\theta}_1}(0)$ in $p_{\dot{\theta}_2}(0)$ enaki nič, s čimer imamo tudi določene vse začetne pogoje sistema.

Med seboj sem primerjal enostavno Eulerjevo metodo, metodo Runge-Kutta 4. reda, RK4 s spremenljivim korakom in nekoliko modificirano Eulerjevo metodo, s katero sem poskušal doseči simplektičnost oz. ohranitev energije. Pri tej modificirani metodi sem po zgledu naloge s sistemom planetov najprej izračunal nove vrednosti momentov p , z njimi izračunal nove vrednosti odvodov in šele nato z njimi izračunal spremembe kotov.

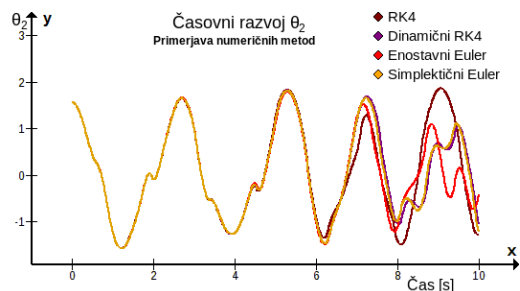
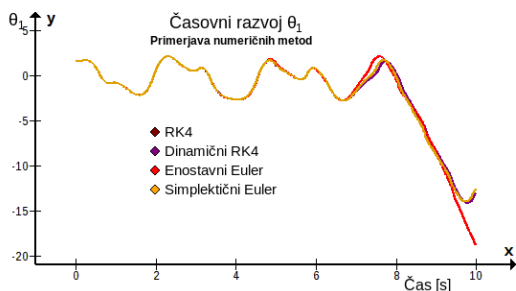
Najprej sem primerjal metode pri različnih časovnih korakih. Izkazalo se je, da pri majhnih odmikih nihala (npr. $\theta = \pi/10$) razlike med metodami in časovnimi koraki niso velike in je krivulje težko ločiti med sabo. Povsem drugačna je zgodba pri velikih odmikih, npr. $\theta = \pi/2$, kar prikazujejo naslednje slike. Ker se razlike pojavijo šele pri daljših časih integracije (spodaj $t = 10$ s), prikazujem namesto kompleksnih faznih diagramov v obliki "nerazpoznavnega šavja" časovna razvoja θ_1 in θ_2 .





Med tem, ko se krivulje v začetnem delu med seboj dobro ujema, pa se na koncu časovnega intervala povsem razhajajo. Kako se rešitev obnaša pri spreminjanju časovnega koraka h je glede na zgornje grafe nemogoče napovedati, kar potrjuje kaotičnost sistema.

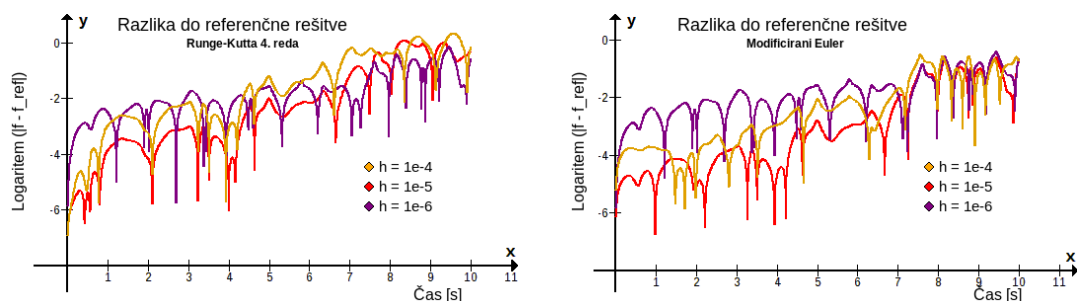
Kako se razlikujejo rešitve različnih metod pri enakih časovnih korakih prikazujeta nadaljnji dve sliki, ki sta bili izračunani z enakim časovnim korakom $h = 10^{-4}$ s. Dodana je tudi rešitev metode RK4 s prilagodljivim časovnim korakom, ki je sicer ne moremo neposredno primerjati z metodami s fiksnim h .



Na levem grafu, kjer so primerjane rešitve za θ_1 , lahko opazimo podobnost med rešitvami prilagodljive oz. dinamične RK4 in rešitve, ki jo da modificirana eulerjeva metoda (rešitvi tako blizu skupaj, da se povsem prekrivata). Nekoliko težje je to opazno na grafu θ_2 , a sta tudi tam tidve krivulji blizu skupaj.

1.1 Katera od rešitev je prava?

Ker analitične rešitve ne poznamo, težko ocenimo katera od rešitev je prava, a se na srečo izkaže, da se pri dovolj majhnih vrednostih h (manjših od 10^{-5}) rešitve vseh metod med seboj dobro ujema. Primerjati je smiselno rešitve, ki so že dovolj skonvergirale h končni rešitvi metode pri zelo majhnem h . Kot referenčno (a ne nujno pravo!) rešitev sem vzel rešitev, ki jo je dala metoda s prilagodljivim časovnim korakom, ter jo primerjal z rešitvami ostalih metod pri zmanjševanju koraka. Spodaj prikazujem rezultata za RK4 in modificirano Eulerjevo metodo, rezultat pri Eulerjevi metodi pa je bil kvalitativno enak.



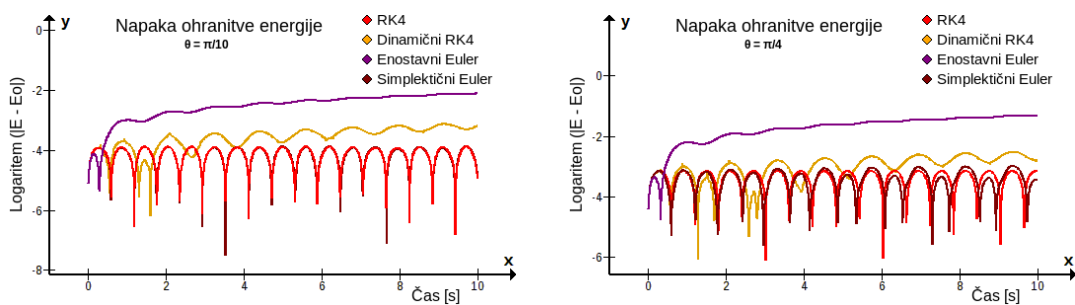
Kot je bilo vidno že na grafih časovnega razvoja generaliziranih koordinat, razlike med metodami s časom povečujejo. Nekoliko bolje se z referenčno rešitvijo ujema rešitev simplektične Eulerjeve metode, vendar se ujemanje sčasoma poslabša približno enako kot pri metodi RK4. Zanimivo je tudi, da se rešitve pri manjših h na koncu slabše ujema od tistih z večjim h , kar je verjetno posledica izbire večjega časovnega koraka v metodi s prilagodljivim korakom. Razlike na koncu sicer znašajo že okoli 10^{-2} , a ker to ne pomeni povsem drugačnega obnašanja nihala lahko pričakujemo, da bi se pri povečanju natančnosti dinamične metode ali ob izbiri drugačne referenčne rešitve razlike zmanjšale.

1.2 Ohranitev energije

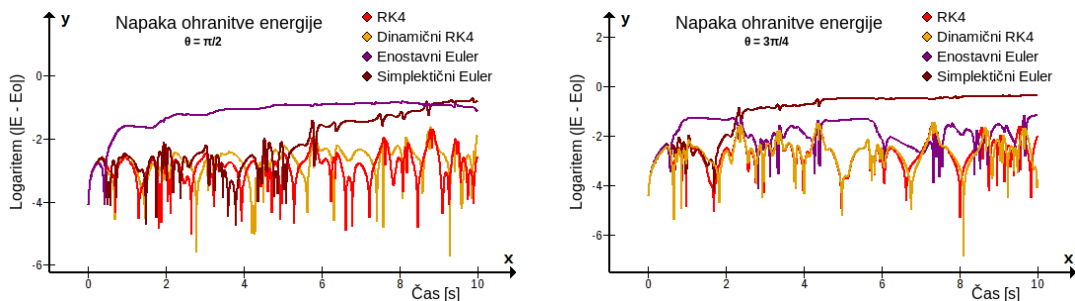
Vsota kinetične in potencialne energije nihala se pri resničnem dvojnem nihalu ohranja, med tem ko to za numerične rešitve ni vedno zagotovljeno. Izraz za celotno energijo nihala $W_k + W_p$ v odvisnosti od kotov in kotnih hitrosti izpeljemo podobno kot Lagrangeovo funkcijo (3). Enostavno lahko rešitev dobimo, če v enačbi (3) obrnemo predznak potencialne energije oz. zadnjega člena, s čimer dobimo

$$E = \frac{1}{6}ml^2 \left[\dot{\theta}_2^2 + 4\dot{\theta}_1^2 + 3\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \right] - \frac{1}{2}mgl(3 \cos \theta_1 - \cos \theta_2). \quad (10)$$

Ker iz sistema gibalnih diferencialnih enačb ne dobimo direktno tudi odvodov oz. kotnih hitrosti $\dot{\theta}_1$ in $\dot{\theta}_2$, sem jih ocenil s pomočjo difference dveh vrednosti, ki sta bili po času 10^{-3} s narazen. Spodnji grafi prikazujejo kako dobro se energija ohranja pri različnih začetnih kotih nihala θ . Vsi primeri so bili izračunani pri časovnem koraku $h = 10^{-5}$ s.



Pri majhnih odmikih nihala lahko na tej časovni skali dosežemo natančnost do 4 decimalnih mest, pri čemer energijo najboljše ohranjata metodi RK4 in naša poskusna modificirana Eulerjeva metoda. Najslabše jo pričakovano ohranja Eulerjeva metoda, med tem ko se dinamična RK4 zaradi selektivno manjših korakov približa ostalima dvema. Podobno kot pri časovnem razvoju kotov, je tudi tukaj drugače pri velikih odmikih:



Nekoliko nepričakovano se tukaj moj poskus simplekličnega integratorja odreže slabše kot RK4 in njena dinamična različica, pri kotu $\theta = 3/4\pi$ pa celo slabše od navadne Eulerjeve metode. Do enakega pojava j prišlo tudi pri nadaljnjem zmanjševanju časovnega koraka h (ni prikazano na grafih), ko navadna Eulerjeva metoda še vedno bolje ohranja energijo od modificirane. V splošnem sem dobil sem pri velikih odmikih nihala pri vseh metodah dobil skoraj dva reda slabšo natančnost ohranitve kot pri majhnih odmikih nihala.

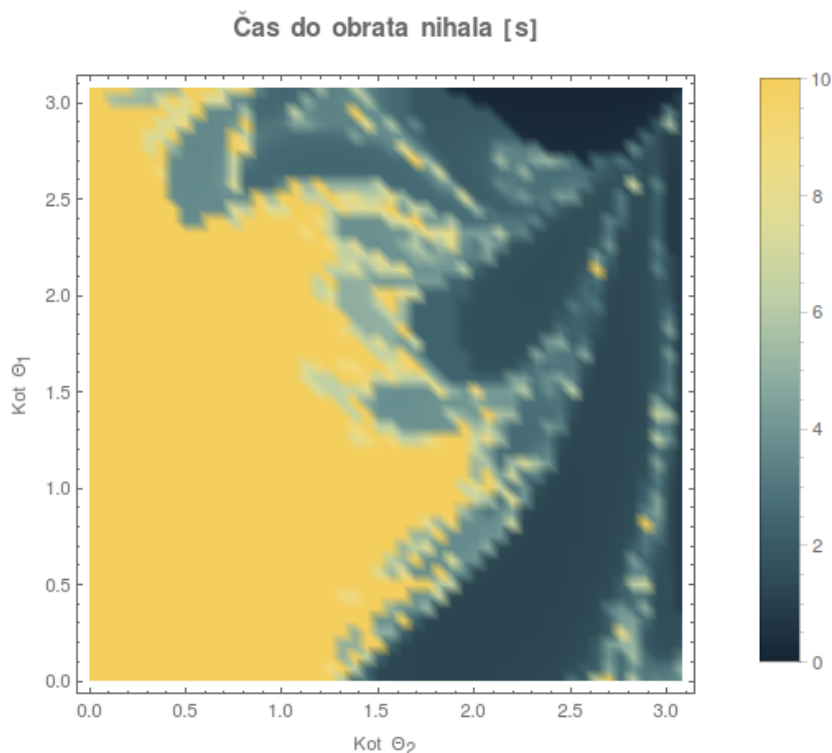
Glede na pokazano lahko zaključimo, da so sicer med rešitvami različnih numeričnih metod velike razlike, a le-te zbledijo ob uporabi primerno majhnih časovnih korakov.

2 Kaotičen sistem

Kot nakazujejo že razlike med numeričnimi metodami, se sistem pri večjih odmikih in le nekoliko različnih začetnih parametrih obnaša popolnoma različno in nepredvidljivo. Ker je nihalo dvojno, mu ne moremo pripisati npr. nihajnega časa, saj je spreminjanje kateregakoli od kotov vse prej kot sinusno. Dvojno nihalo za razliko od enojnega prav tako nima nobene lastne frekvece, s katero bi ga lahko vzbudili.

Namesto nihajnih parametrov sem si zato ogledal, pri kakšnih začetnih pogojih naredi spodnja palica nihala obrat (prečka labilno lego) in po kakšnem času se to zgodi.

Pri obravnavi sem se omejil na kote $\theta_1, \theta_2 \in [0, \pi]$, celotno območje pa sem pregledal s korakom po $\pi/50$, s čimer sem dobil 2500 točk na $t(\theta_1, \theta_2)$ diagramu. Časovni razvoj obeh količin sem spremljal do časa obrata oz. do največ $t = 15$ s, v kolikor do obrata ni prišlo, bodisi iz energijskih, bodisi iz kakšnih drugih razlogov.



Na grafu je vidnih nekaj območji s podobnimi časi obrata nihala, a so ta območja brez pravilnih oblik. Največje je območje, pri katerem v času do 15 s sploh ne pride do obrata, razmeroma majhno pa je tisto, pri katerem

do obrata pride skoraj takoj. Položaj območja je smiseln, saj je takrat spodnja palica nihala že skoraj povsem nad prvo in se zato hitro prevesi čez prvo. Rezultat ponovno potrjuje, da je sistem kaotičen, zato velja omeniti tudi, da bi pregled s finejšim korakom po θ_1, θ_2 lahko dal različne na robovih območji.

3 Za konec

Ker sem imel numerične metode tako kot ponavadi napisane v JavaScriptu, se nisem mogel upreti izzivu in sem naredil še program, ki s sproti računa položaj dvojnega nihala in ga nato pomočjo tehnologije HTML5 canvas tudi prikaže na spletni strani. Za zagotovitev hitrosti in natančnosti sem uporabil prilagodljivo Eulerjevo metodo, pri kateri se numerični rešitvi pri delitvi na podintervale med seboj ne smeta razlikovati za več kot 10^{-10} . Kakršnakoli večja toleranca je sicer vodila v znatno različne rešitve, med tem ko še zmanjšana ni omogočala tekočega delovanja.

Program se nahaja na:

<http://rimskacesta.org/projekti/dvojno-nihalo.html>

Kljub dvomom o hitrosti reševanja diferencialnih enačb v JavaScriptu se je izkazalo, da je reševanje kljub uporabi enakih funkcij primerljivo hitro in v nekaterih primerih celo nekoliko hitrejše kot v jeziku C. Kako in zakaj je do tega prišlo mi ni uspelo ugotoviti.

4 Zaključek

V nalogi sem poskušal z numeričnimi metodami izračunati obnašanje dvojnega nihala pri velikih kotih, kjer gibalne enačbe kljub enostavni izbiri lastnosti nihala niso več analitično rešljive. V nalogi sem pokazal, da so sicer numerične metode tudi pri večjih vrednostih h stabilne, a pride med rešitvami posameznih metod do pomembnih razlik in posledičnega popolnoma drugačnega obnašanja dvojnega nihala. Razlike med posameznimi metodami se močno zmanjšajo pri dovolj majhnih vrednostih h . Žal so časovni koraki potrebni za natančen izračun pri večjih odmikih nihala razmeroma majhni in zato zahtevajo dolge računske čase. Od obravnavanih metod se je tako po času kot po ohranitvi energije najbolje odrezala metoda RK4 s prilagodljivim časovnim korakom.

Literatura

- [1] http://www.myphysicslab.com/dbl_pendulum.html.
- [2] <http://scienceworld.wolfram.com/physics/DoublePendulum.html>.
- [3] https://en.wikipedia.org/wiki/Double_pendulum.
- [4] http://www2.ph.ed.ac.uk/~egardi/MfP3-Dynamics/Dynamics_lecture_16.pdf.